ENSA Al Hoceima, AP1,
Analyse II, 2018-2019
TD 4 : Séries Entiéres

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$S_1=\sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n \quad ; \quad S_2=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+3)!z^n \quad ; \quad S_3=\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$$
$$S_4=\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\tfrac{1}{n})^{n^2}z^n \quad ; \quad S_5=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n^2}z^n \quad ; \quad S_6=\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{\ln(n)}{n^2}z^n$$

Exercice 2 : Soit f définie sur $]-1,1[$ par

$$f(x)=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 3 : Développer les fonctions suivantes en séries entières préciser leur rayon de convergence R.

$$f_1=\frac{1}{(1-x)(2+x)} \ ;$$
$$f_2=\ln(x^2-5x+6) \ ;$$

Exercice 4 : (Ratt 2018)

1. Déterminer le rayon de convergence R, puis calculer pour tout x réel la somme

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

2. Montrer que, pour tout x réel, on a

$$S''(x)+S'(x)+S(x)=e^x$$

Exercice 5 : (Exam 2018)

Soit la série entière

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$$

1. Déterminer I le domaine de convergence de la série.
2. Vérifier que $f(x)$ est continue sur I ?
3. Pour $x\in I$, expliciter $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Pr. Abouelhanoune